3 DOMINIO Y RANGO

3.1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

Cuando se grafica una función existen las siguientes posibilidades:

a) Que la gráfica ocupe todo el plano horizontalmente (sobre el eje de las ***x***).
b) Que la gráfica ocupe parte del plano horizontalmente (sobre el eje de las ***x***).
c) Que la gráfica ocupe todo el plano verticalmente (sobre el eje de las ***y***).
d) Que la gráfica ocupe parte del plano verticalmente (sobre el eje de las ***y***).

Por ejemplo, si se grafica la ecuación de la circunferencia

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$$

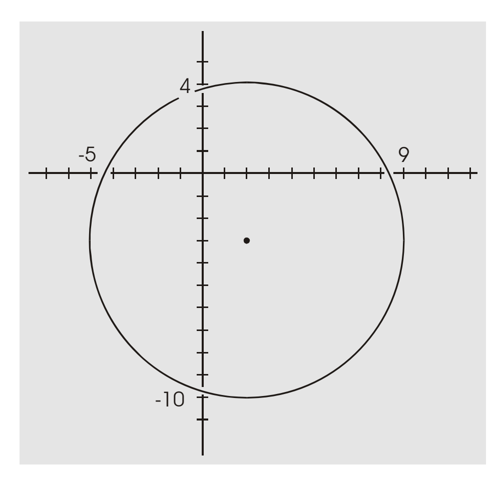


figura 3.1

como puede verse en la figura 3.1, la gráfica no ocupa todo el espacio horizontal ni verticalmente. En x la gráfica ocupa el espacio que va desde $x=-5$ hasta $x=9$, o sea en el intervalo $-5 \le x \le 9$; mientras que en y la gráfica ocupa el espacio que va desde $y=-10$ hasta $y=4$, es decir en el intervalo $-10 \le y \le 4$. Fuera de esos dos intervalos no existe gráfica.

Lo anterior significa que al tabular para hacer la circunferencia anterior, a la variable x solamente se le pueden dar valores que vayan de $x=-5$ hasta $x=9$. En otras palabras, cada vez que se le dé un valor a la x que esté dentro del intervalo $-5 \le x \le 9$, se obtiene un valor para la y; pero si se le da un valor fuera de ese intervalo no se obtiene nada para y.

Por ejemplo, si $x = 5$, sustituyendo en la ecuación de la circunferencia se obtiene:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$$
$$(5-2)^2 + (y+3)^2 = 49$$
$$9 + (y+3)^2 = 49$$
$$(y+3)^3 = 49 - 9$$
$$(y+3)^2 = 40$$
$$y + 3 = \pm\sqrt{40}$$
$$y + 3 = \pm 6.32$$
$$y = \pm 6.32 - 3$$

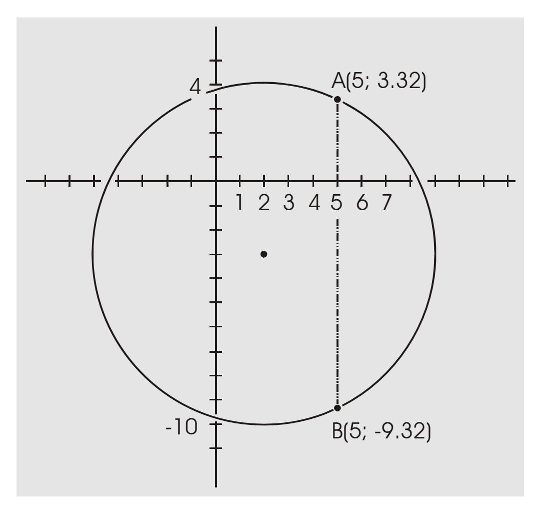


figura 3.2

de donde

$$y_1 = +6.32 - 3$$
$y_1 = 3.32$ (corresponde al punto A en la figura 3.2)

$$y_2 = -6.32 - 3$$
$y_2 = -9.32$ (corresponde al punto B en la figura 3.2).

En cambio, si se le da un valor de $x = 11$, como está fuera del intervalo de la gráfica, no se obtiene nada para la y. Haciéndolo:

$$(11-2)^2 + (y+3)^2 = 49$$
$$9^2 + (y+3)^2 = 49$$
$$81 + (y+3)^2 = 49$$
$$(y+3)^2 = 49 - 81$$
$$(y+3)^2 = -32$$

lo cual no es posible porque ninguna cantidad elevada al cuadrado da un número negativo.

3.2 DOMINIO

El dominio, en términos no técnicos, son todos los valores que se le pueden dar a la variable x con los cuales la variable dependiente y adquiere a su vez un valor real y bien determinado. O bien, son todos los valores que se le pueden dar a la variable x con los cuales se obtiene su gráfica.

El dominio es el conjunto de puntos o valores que puede tomar la variable independiente x en los cuales está definida la función.

Obsérvese que en el ejemplo de la circunferencia anterior no se le pudo dar a la x el valor de $x = 11$ porque no se podía obtener nada para la variable y; significa que $x = 11$ no pertenece al dominio. Visto en la gráfica, en $x = 11$ no hay gráfica.

Los valores que no puede tomar la variable x son dos: los que hacen cero el denominador o los que hacen negativa una raíz cuadrada. En realidad hay más, pero en este curso solamente se tomarán en cuenta esos dos.

De tal manera que el dominio de cualquier función (al menos de las que se verán en este curso) se puede sintetizar en la siguiente regla:

El dominio de cualquier función son todos los valores o números de la recta numérica, desde $-\infty$ hasta $+\infty$, que queden después de quitar todos aquellos que hacen cero el denominador (o denominadores) o que hagan negativa una raíz cuadrada.

Para encontrar los valores que hacen cero el denominador (o los denominadores), se iguala a cero el denominador y se resuelve la ecuación que resulta. Para encontrar los valores que hacen negativa una raíz cuadrada se construye una desigualdad haciendo el subradical menor que cero.

Se deduce de lo anterior que toda función que no tenga denominadores con variable allí y que

no tenga raíces cuadradas, su dominio son todas las x, es decir, toda la recta numérica, escrito: $-\infty < x < +\infty$.

Ejemplo 1: Hallar el dominio de $f(x) = 3x + 2$.

Solución: Como no hay denominadores ni raíces cuadradas, no hay que quitar de la recta numérica nada; por lo tanto, el dominio son todas las x. Esto quiere decir que se le puede dar a la x cualquier valor y siempre se obtendrá un número real al hacer la cuenta $3x + 2$.

Ejemplo 2: Hallar el dominio de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

Solución: En este caso no hay raíces cuadradas, pero sí existe un denominador con variable. Entonces debe buscarse el valor que hace cero ese denominador y excluirlo de la recta numérica.

El valor que hace cero el denominador se obtiene haciendo

$$x - 2 = 0$$

de donde

$$x = 2$$

Este es el único valor que no puede tomar la x, por lo tanto el dominio son todos los de la recta numérica menos el 2, lo cual se escribe de cualquiera de las siguientes formas:

$$x \neq 2$$

o bien

$$x < 2 \cup x > 2$$

o también

$$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty).$$

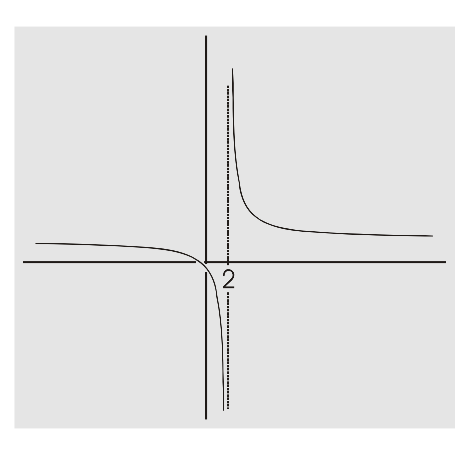


figura 3.3

La figura 3.3 es la gráfica correspondiente a la función $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$. Nótese que para $x = 2$ no existe gráfica, para todos los demás valores de x, sí.

Ejemplo 3: Hallar el dominio de $y = \sqrt{x-3}$.

Solución: Obsérvese que si la x vale $x = 0$, entonces $y = \sqrt{-3}$ que no existe, por lo tanto la x no puede tomar ese valor. En cambio, si $x = 7$, entonces $y = \sqrt{4} = 2$, lo que significa que la x sí puede tomar el valor de 7. La gráfica corresponde a la figura 3.4.

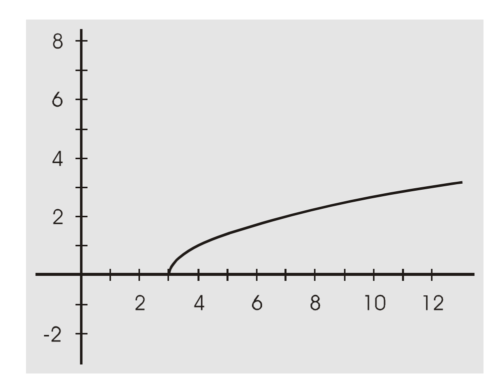
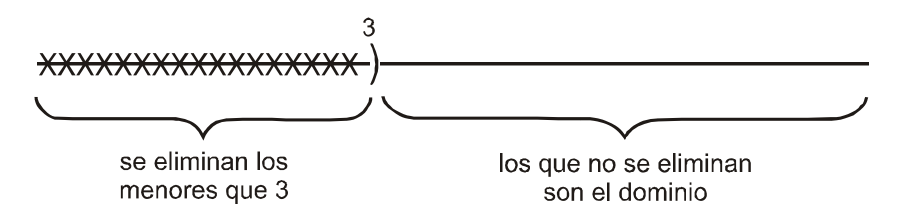


figura 3.4

Para localizar los valores que sí puede tomar la x , deben encontrarse primero los valores no válidos que son los que hacen negativa la raíz cuadrada, o sea, los menores que cero, los cuales se obtienen planteando la desigualdad

$$x - 3 < 0$$

de donde se obtiene que $x < 3$. Significa que todas las x menores que 3 hacen que la raíz cuadrada se vuelva negativa; por lo tanto, todas las equis menores que tres no son válidas. Quitándolas de la recta numérica quedan las equis que sí son válidas, o sea el dominio, las cuales son todas las equis mayores o iguales que tres. Nótese que $x = 3$ si es válida.



El dominio es

$$\boxed{x \geq 3}$$

Ejemplo 4: Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x-7}$

Solución: En este caso existe un denominador con variable y una raíz cuadrada. Entonces deben eliminarse todas las equis que hacen cero el denominador y las que hacen negativa la raíz cuadrada.

a) Valor que hace cero el denominador:

$$x - 7 = 0$$

$$\boxed{x = 7}$$

Nota: $x = 7$ es la asíntota en la gráfica, figura 3.5. Dicha gráfica se acerca por cualquiera de sus dos ramas a la asíntota, pero nunca llegan a cortarse porque en la ecuación la x no puede valer $x = 7$.

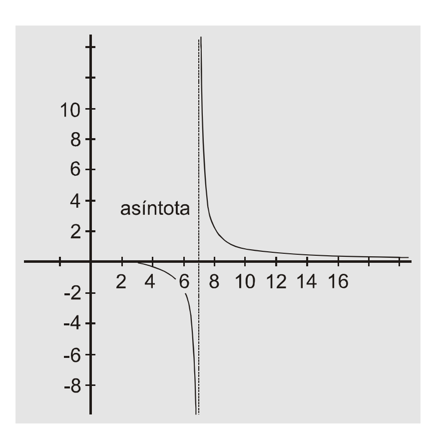


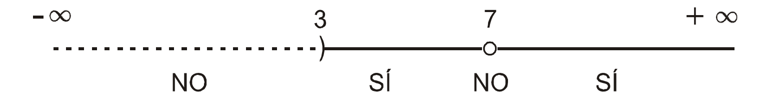
figura 3.5

b) Valores que hacen negativa la raíz cuadrada:

$$x - 3 < 0$$

$$\boxed{x < 3}$$

Significa que las equis que no son válidas son todas las menores que tres y además la que vale 7. Quitándolas de toda la recta numérica quedan las que sí son válidas, o sea el dominio. Es importantísimo notar que $x = 3$ no se elimina.



Entonces el dominio es

$$3 \le x < 7 \cup x > 7$$

que también se puede escribir como

$$\left[3, 7\right) \cup \left(7, +\infty\right)$$

o bien

$$x \ge 3 \text{ , con } x \ne 7$$

Ejemplo 5: Hallar el dominio de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x - 20}$

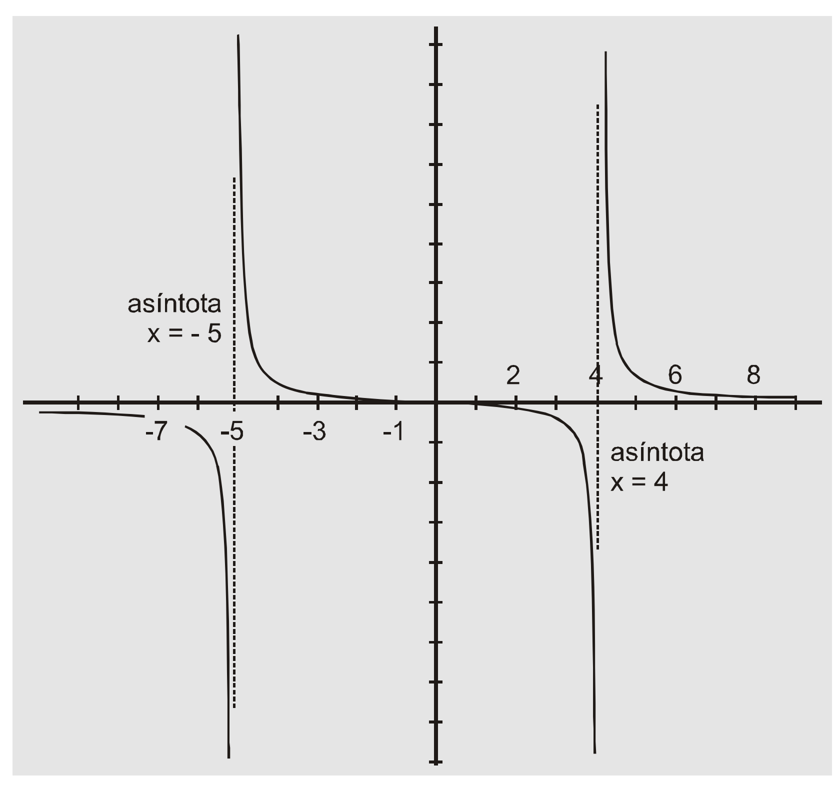


figura 3.6

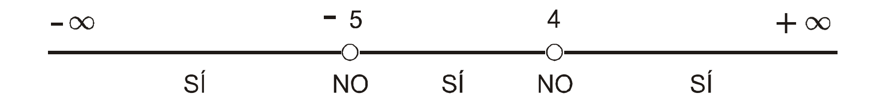
Solución: La gráfica correspondiente es la de la figura 3.6, en la que se puede notar que en $x = -5$ y en $x = 4$ (donde están las asíntotas), no hay gráfica, que son los valores en donde el denominador se hace cero, lo cual se calcula así:

$$x^2 + x - 20 = 0 \qquad \text{(éste es el denominador)}$$

de donde

$$x_1 = -5$$
$$x_2 = 4$$

Quitando esos dos valores de la recta numérica se obtiene el dominio:



lo cual se escribe

$$x \neq -5 \neq 4$$

o bien

$$x < -5 \cup -5 < x < 4 \cup x > 4$$

o también así

$$(-\infty, -5) \cup (-5, 4) \cup (4, \infty)$$

Ejemplo 6: Hallar el dominio de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 15}}{x - 8}$

Solución: Los valores no válidos para la x son los que hacen negativa la raíz cuadrada y además el que hace cero el denominador.

a) Los valores que hacen negativa la raíz cuadrada se obtienen haciendo

$$x^2 + 2x - 15 < 0$$

Resolviendo la ecuación

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

se llega a que

$$x_1 = -5$$
$$x_2 = 3$$

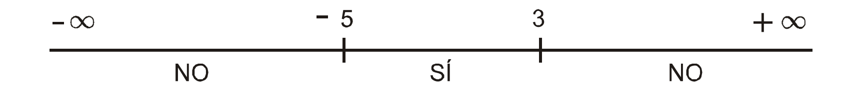


Probando con $x = 0$:

$$0^2 + 2(0) - 15 < 0$$

$$-15 < 0 \quad \text{cierto}$$

Por lo tanto



Son todas las equis que están entre -5 y 3, o sea

$$-5 < x < 3$$

Como son las equis que hacen negativa la raíz cuadrada, deben eliminarse de la recta numérica.

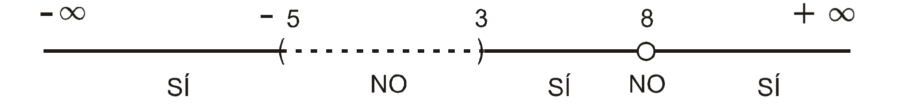
b) El valor que hace cero denominador es

$$x - 8 = 0$$

de donde

$$x = 8$$

valor que debe eliminarse también de la recta numérica. Lo que queda en la recta numérica son los valores que sí son válidos, o sea el dominio. Nótese que $x = -5$ lo mismo que $x = 3$ no se eliminan.



Finalmente, el dominio es

$$x \le -5 \cup x \ge 3 \text{ , con } \quad x \ne 8$$

que también puede escribirse como

$$x \le -5 \cup 3 \le x < 8 \cup x > 8$$

La gráfica correspondiente es la mostrada en la figura 3.7.

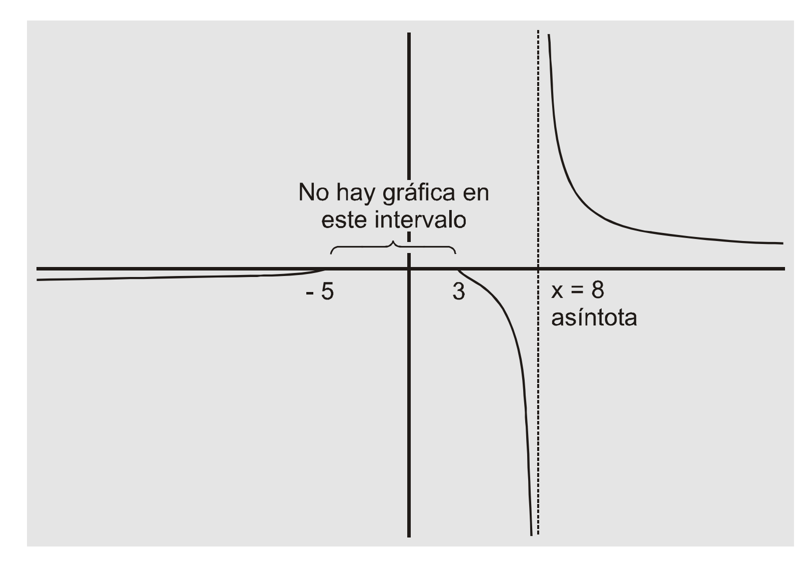


figura 3.7

Ejemplo 7: Hallar el dominio de $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-1}{x+11}}$

Solución: La gráfica correspondiente es la mostrada en la figura 3.8.

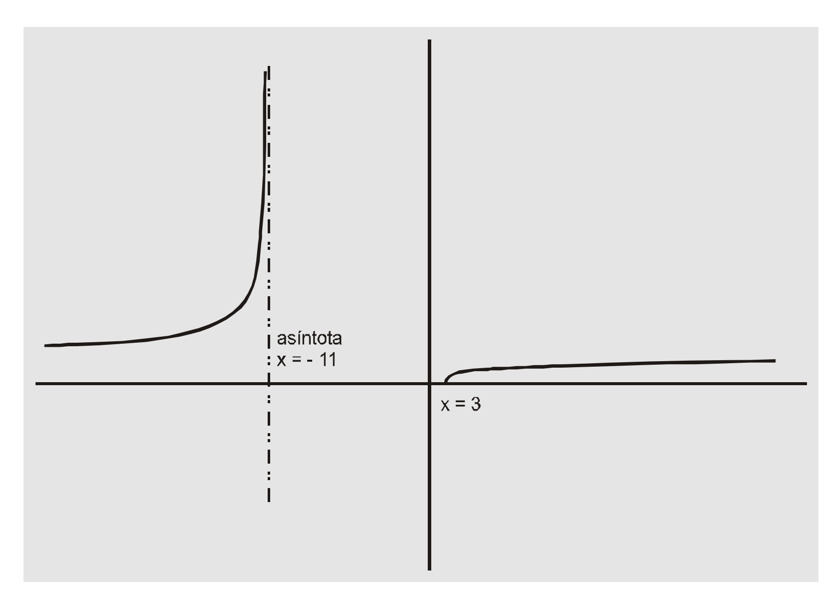


figura 3.8

Obsérvese que en $x = -11$ (valor que hace cero el denominador) hay una asíntota y que entre $x = -11$ y $x = 3$ no hay gráfica por ser los valores de la x que hacen negativa la raíz cuadrada, como se verá a continuación:

a) Los valores que hacen negativa la raíz cuadrada son:

$$\frac{3x-1}{x+11} < 0$$

Como la fracción es negativa por ser menor que cero, hay dos posibilidades: Una, que sea $\frac{+}{-}$; la otra que sea $\frac{-}{+}$. Hay que analizar opción por opción.

Opción I: $\frac{+}{-}$: Significa que el numerador es mayor que cero (positivo) mientras que el denominador es menor que cero (negativo).

Haciendo el numerador mayor que cero:

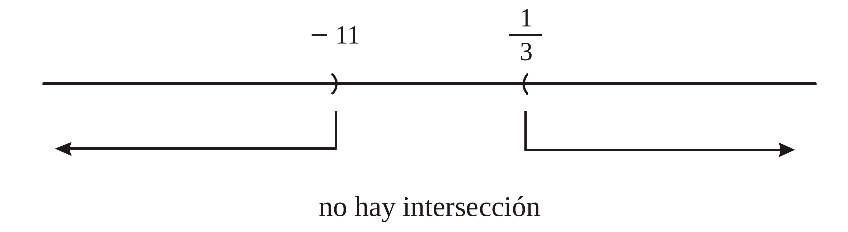
$$3x - 1 > 0$$
$$3x > 1$$
$$x > \frac{1}{3}$$

Haciendo el denominador menor que cero:

$$x + 11 < 0$$
$$x < -11$$

Como ambas condiciones deben cumplirse al mismo tiempo, se trata de una intersección.

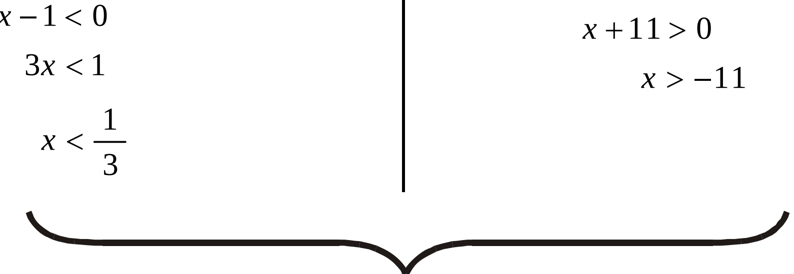
La intersección se muestra en la siguiente gráfica:



Opción II: $\dfrac{-}{+}$: Significa que el numerador es menor que cero (negativo) mientras que el denominador es mayor que cero (positivo).

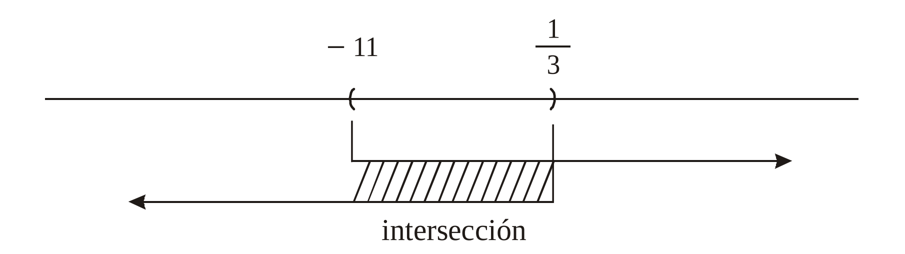
Haciendo el numerador menor que cero:

Haciendo el denominador mayor que cero:



Como ambas condiciones deben cumplirse al mismo tiempo, se trata de una intersección.

La intersección se muestra en la siguiente gráfica:



Segunda solución parcial: $-11 < x < \dfrac{1}{3}$

Por lo tanto, la solución total es la unión de las dos soluciones parciales, pero como solamente existe una solución parcial (la segunda), ella es toda la solución total.

$$-11 < x < \frac{1}{3}$$

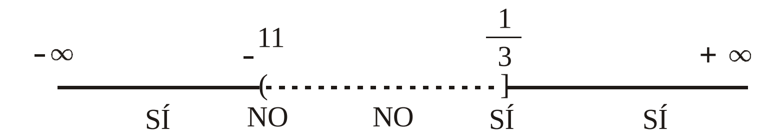
No perder de vista que esta solución total son los valores que hacen negativa la raíz cuadrada, los que deben eliminarse de la recta numérica.

b) Los valores que hacen cero el denominador son:

$$x + 11 = 0$$

$$\boxed{x = -11}$$

Quitando de toda la recta numérica los valores que hacen negativa la raíz cuadrada y los que hacen cero el denominador, queda:



De manera que el dominio es

$$\boxed{x < -11 \cup x \geq \frac{1}{3}}$$

EJERCICIO 11

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

1) $y = x$

2) $y = 3x$

3) $y = 5x + 1$

4) $y = x^2$

5) $y = -x^2$

6) $y = -x$

7) $y = \sqrt{x}$

8) $y = \sqrt{x+2}$

9) $y = -\sqrt{x}$

10) $y = \sqrt{-x}$

11) $y = \sqrt{5x-3}$

12) $y = \sqrt{8x+1}$

13) $y = \sqrt{-2x-9}$

14) $y = \sqrt{-5x+1}$

15) $y = \sqrt{x^2-25}$

16) $y = \sqrt{x^2-16}$

17) $y = \sqrt{3x^2-14x-5}$

18) $y = \sqrt{-2x^2+5x+7}$

19) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

20) $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

21) $y = \dfrac{2x}{3x-4}$

22) $y = \dfrac{5x-4}{4x}$

23) $y = \dfrac{2x}{x^2-4}$

24) $y = \dfrac{16}{2x^2-32}$

25) $y = \dfrac{11}{x^3}$

26) $y = \dfrac{1}{x^2+3}$

27) $y = \dfrac{13}{2x^2+1}$

28) $y = \dfrac{2x-11}{36-x^2}$

29) $y = \dfrac{\sqrt{3x+7}}{2x-5}$

30) $y = \dfrac{\sqrt{11-3x}}{x+13}$

31) $y = \dfrac{\sqrt{12-5x}}{3x+13}$

32) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x+6}$

33) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 42}}{3x - 31}$

34) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x - 15}}{x - 7}$

35) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}{x - 11}$

36) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 30}}{x^2 - 100}$

37) $y = \dfrac{x + 5}{\sqrt{x - 2}}$

38) $y = \dfrac{2}{\sqrt{5x - 1}}$

39) $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{9 - 2x}}$

40) $y = \dfrac{6}{\sqrt{-x}}$

41) $y = \dfrac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}$

42) $y = \dfrac{x - 9}{\sqrt{3x^2 - 14x - 5}}$

43) $y = \dfrac{77}{\sqrt{2x^2 - 5x + 19}}$

44) $y = \sqrt{\dfrac{2x - 3}{x + 7}}$

45) $y = \sqrt{\dfrac{x - 8}{x + 11}}$

46) $y = \sqrt{\dfrac{2x - 9}{x - 1}}$

47) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 49}}$

48) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 20}{x - 11}}$

49) $y = \sqrt{\dfrac{-x}{x^2 + 1}}$

50) $y = \sqrt{\dfrac{-x - 2}{x^2 + 49}}$

3.3 RANGO

El rango de una función es equivalente al dominio, solamente que mientras éste es sobre el eje de las x, el rango es sobre el eje de las y.

Analizado la función desde su gráfica, aunque de manera no muy formal se puede decir que el dominio es el intervalo de valores de la x en la que existe su gráfica, mientras que el rango es el intervalo de valores de la y en la que existe su gráfica.

Por ejemplo, obsérvese en la figura 3.9 la gráfica correspondiente a la ecuación de la circunferencia

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$$

respecto del eje x, la gráfica existe en el intervalo $-4 \le x \le 8$: éste es el *dominio*. Mientras que respecto del eje y, la gráfica existe en el intervalo $-10 \le y \le 2$: éste es el *rango*.

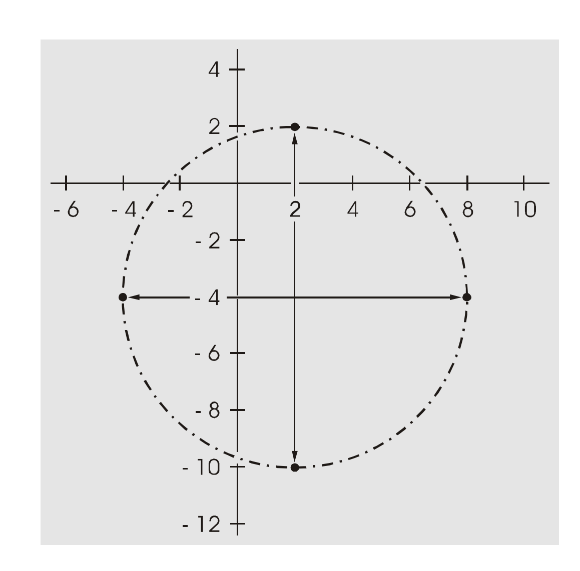


figura 3.9

Para calcular el dominio, tal como ya se estudió al inicio de este capítulo, estando despejada la y, se eliminan los valores de la x que hacen cero el denominador o negativa la raíz cuadrada. De la misma forma, para calcular el rango, estando despejada ahora la x, se eliminan los valores de la y que hacen cero el denominador o negativa la raíz cuadrada.

Ejemplo 1: Obtener el dominio y el rango de la circunferencia de la figura 3.9.

Solución: Para obtener el dominio, primero debe despejarse la y de la ecuación correspondiente a la circunferencia:

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$$

$$(y+4)^2 = 36 - (x-2)^2$$

$$y + 4 = \sqrt{36 - (x-2)^2}$$

$$y + 4 = \sqrt{36 - (x^2 - 4x + 4)}$$

$$y + 4 = \sqrt{-x^2 + 4x + 32}$$

$$y = -4 + \sqrt{-x^2 + 4x + 32}$$

a) Los valores que hacen cero el denominador: no hay.

b) Los valores que hacen negativa la raíz cuadrada son

$$-x^2 + 4x + 32 < 0$$

que resolviendo conforme alguno de los métodos ya estudiados en este curso se obtiene que lo valores más chicos que menos cuatro y los más grandes que ocho hacen negativa la raíz cuadrada (ver figura 3.10), por lo que deben eliminarse. Entonces solamente quedan los valores comprendidos entre menos cuatro y ocho, incluidos ambos. Éste es el dominio.

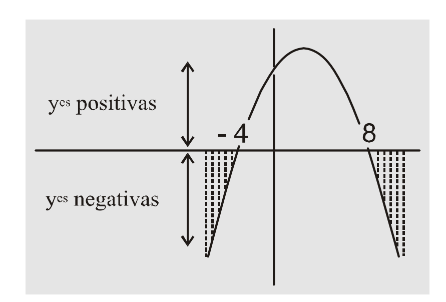


figura 3.10

El dominio es

$$\boxed{-4 \leq x \leq 8}$$ (comprobarlo en la figura 3.9)

Para obtener el rango, primero debe despejarse la x de la ecuación correspondiente a la circunferencia:

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$$

$$(x-2)^2 = 36 - (y+4)^2$$

$$x - 2 = \sqrt{36 - (y+4)^2}$$

$$x - 2 = \sqrt{36 - (y^2 + 8y + 16)}$$

$$x - 2 = \sqrt{36 - y^2 - 8y - 16}$$

$$x - 2 = \sqrt{-y^2 - 8y + 20}$$

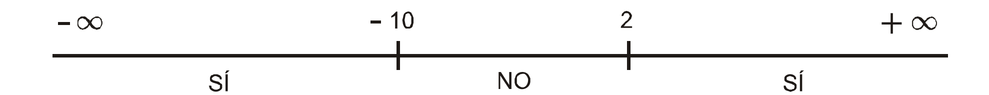
$$x = 2 + \sqrt{-y^2 - 8y + 20}$$

Una vez despejada la variable x se hace el mismo análisis que para el dominio, es decir, se buscan los valores, ahora de la variable y, que hacen cero el denominador y negativa la raíz cuadrada y se eliminan de la recta numérica. Lo que queda es el rango.

En este caso no hay valores que hagan cero el denominador porque no hay denominador. En cambio, los valores que hacen negativa la raíz cuadrada son:

$$-y^2 - 8y + 20 < 0$$

Resolviendo esta desigualdad por el método de intervalos, se llega a que



Significa que las yes menores que - 10 y las mayores que 2 hacen negativa a la raíz cuadrada, por lo que deben eliminarse de la recta numérica. Haciéndolo quedan los valores entre - 10 y 2 incluidos estos extremos, de manera que el rango es

$$\boxed{-10 \le y \le 2}$$ (comprobarlo en la figura 3.9)

Ejemplo 2: Hallar el dominio y el rango de $y = \dfrac{4-3x^2}{x^2}$.

Solución: El dominio, como no hay raíz cuadrada, son los valores que quedan luego de quitar aquellos que hacen cero el denominador, es decir que $x^2 = 0$, o sea $x = 0$. Por lo tanto, el dominio es

$$\boxed{x \neq 0}$$

Para calcular el rango, primero se despeja la x:

$$y = \frac{4-3x^2}{x^2}$$

$$x^2 y = 4 - 3x^2$$

$$x^2 y + 3x^2 = 4$$

$$x^2 \left(y + 3 \right) = 4$$

$$x^2 = \frac{4}{y+3}$$

$$x = \sqrt{\frac{4}{y+3}}$$

$$x = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{y+3}}$$

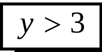
$$x = \frac{2}{\sqrt{y+3}}$$

Luego de obtener una expresión con la variable x despejada, se analizan los valores de la variable y que hacen cero el denominador y que hacen negativa la raíz cuadrada.

Valores que hacen cero el denominador:	Valores que hacen negativa la raíz cuadrada:
$y + 3 = 0$	$y + 3 < 0$
$y = -3$	$y < -3$

Eliminando estos valores de la recta numérica, lo que queda son los valores válidos, es decir, el rango.

El rango es



EJERCICIO 12

Determinar el rango de las siguientes funciones:

1) $y = 5x - 3$

2) $y = \dfrac{1}{x}$

3) $y = \dfrac{1}{x - 4}$

4) $y = \dfrac{4}{2x + 5}$

5) $y = \dfrac{2}{2 - 7x}$

6) $y = \dfrac{x}{x - 6}$

7) $y = \dfrac{x - 1}{x + 4}$

8) $y = \dfrac{9 - x^2}{2x^2}$

9) $y = \dfrac{16 + 7x^2}{x^2}$

10) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 25}}{x}$